БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-00-645, № 11-01-00-626), Министерства образования и науки РФ (ГК № 14.132.21.1348, проект № 1.1877.2011).

Bulgakov A.I., Filippova O.V., Malyutina E.V. ABOUT SEMI-CONTINUOUS DEPENDENCE OF SET OF PHASE TRAJECTORIES OF MULTICOMPONENT SYSTEM OF AUTOMATIC CONTROL FROM PARAMETERS AND ENITIAL CONDITIONS

Mathematical model of multicomponent system of automatic control is researched. The conditions of semi-continuous dependence from below sets of the generalized phase trajectories of this model from parameters and initial conditions are found.

Key words: operated system; differential inclusion; convex-valued with respect to switching.

УДК 517.9

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова

Ключевые слова: накрывающие отображения метрических пространств; системы функциональных уравнений; оператор Немыцкого.

Получены условия накрывания оператора Немыцкого, действующего в пространствах измеримых функций. Этот результат позволил применить ранее доказанные авторами теоремы о возмущениях векторных накрывающих отображений к исследованию систем функциональных уравнений. Для таких систем найдены условия разрешимости в классе измеримых функций и получены оценки решений.

До недавнего времени исследования дифференциальных, интегральных, функциональных уравнений неявного вида были фрагментарными, такие уравнения редко применялись в математических моделях. Новые инструменты исследования уравнений неявного вида дала современная теория накрывающих отображений. Среди многочисленных работ по этой тематике выделим статьи [1–4], наиболее близкие нашему исследованию и позволившие получить ряд новых результатов о существовании, продолжаемости решений, корректности интегрального уравнения Volterra [4–5], не разрешенного относительно производной дифференциального уравнения [6–7], начать изучение задач управления для таких уравнений [8–10], предложить алгоритмы приближенного решения [11]. В связи с рассмотрением краевых задач и систем управления (содержащих кроме дифференциальных уравнений еще начальные и краевые условия, ограничения на управления и пр.) потребовалось распространить многие результаты на векторные накрывающие отображения. Авторами данной работы в [12] были доказаны теоремы о липшицевых возмущениях накрывающих отображений, действующих в произведении метрических пространств. Этот результат позволил получить в [10] условия существования и непрерывной зависимости от параметров решений краевых задач для систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. В предлагаемой работе этот результат используется для исследования систем функциональных уравнений.

Приведем определения основных понятий.

Для метрического пространства (X,ρ_X) обозначим через $B_X(x,r)$ замкнутый шар с центром в точке x радиуса $r>0$.

Пусть заданы метрические пространства (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) и число $\alpha>0$.

Определение 1. Отображение $F:X\to Y$ называется *α-накрывающим* [4], если для любого $r>0$ и любого $u\in X$ имеет место включение

$$F(B_X(u,r))\supseteq B_Y(F(u),\alpha r).$$

Отображение $F:X\to Y$ называется *условно α-накрывающим* [6], если для любого $r>0$ и любого $u\in X$ имеет место включение

$$F(B_X(u,r))\supseteq B_Y(F(u),\alpha r)\cap F(X).$$

Определение 2. Отображение $F:X\to Y$ будем называть *α-накрывающим в точке* $u_0\in X$, если если для любого $r>0$ имеет место включение

$$F(B_X(u_0,r))\supseteq B_Y(F(u_0),\alpha r),$$

и *условно α-накрывающим в этой точке*, если

$$F(B_X(u_0,r))\supseteq B_Y(F(u_0),\alpha r)\cap F(X).$$

Последнее определение является частым случаем определения накрывания на заданной системе центров и радиусов шаров, предложенного в [7,с. 1524]. Заметим также, что отображение является (условно) α-накрывающим тогда и только тогда, когда оно (условно) α-накрывающее в любой точке.

Нам также потребуется следующее определение, несколько расширяющее классическое понятие липшицевости. Пусть $\beta\geqslant 0$.

Определение 3. Отображение $G:X\to Y$ будем называть *β-липшицевым* в точке $u_0\in X$, если для любого $x\in X$ выполнено неравенство

$$\rho_Y\big(G(x),G(u_0)\big)\leqslant \beta\,\rho_X(x,u_0).$$

Вначале сформулируем условия накрывания оператора Немыцкого в пространстве измеримых функций, имеющих существенно ограниченное отклонение от заданной измеримой функции.

Обозначим $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{R}$, соответственно, множества натуральных, целых, действительных чисел; $\mathbb{R}^l$ — пространство l-мерных вещественных векторов с нормой $|\cdot|$; $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^l)$ — совокупность непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^l$. Пусть заданы: отрезок $[a,b]\subset\mathbb{R}$, снабженный мерой Лебега μ, измеримое многозначное отображение $\Omega:[a,b]\to\to\mathrm{cl}(\mathbb{R}^l)$ и его измеримое сечение $t\in[a,b]\mapsto\omega(t)\in\Omega(t)$. Определим полное метрическое пространство $L_\infty([a,b],\Omega,\omega)$ измеримых функций $t\in[a,b]\mapsto x(t)\in\Omega(t)$, для которых существует $\operatorname{vrai\,sup}_{s\in[a,b]}|x(s)-\omega(s)|<\infty$, с метрикой

$$\rho_{L_\infty}(x_1,x_2)=\operatorname{vrai}\sup_{s\in[a,b]}|x_1(s)-x_2(s)| \qquad (1)$$

(наряду с этим "стандартным" возможны, конечно, и другие определения метрики, и в сформулированной ниже теореме 2 такая "нестандартная" метрика будет предложена).

Пусть заданы измеримые многозначные отображения

$$t\in[a,b]\mapsto\Omega(t)\in\mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_1}),\quad t\in[a,b]\mapsto\Theta(t)\in\mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_2}),$$

измеримое сечение $\omega(\cdot)$ отображения $\Omega(\cdot)$, и определена функция

$$\big(t \in [a,b],\, x \in \Omega(t)\big) \mapsto g(t,x) \in \Theta(t),$$

удовлетворяющая условиям Каратеодори. Положим $\theta(t)=g(t,\omega(t))$, $t\in[a,b]$. Из известных результатов об операторе Немыцкого в "классическом" пространстве существенно ограниченных функций (см., например, [14,c. 375]) следует, что оператор

$$(N_g x)(t) = g(t,x(t)),$$

действует из $L_\infty([a,b],\Omega,\omega)$ в $L_\infty([a,b],\Theta,\theta)$ тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\forall\, r>0 \;\; \exists\, R \geqslant 0 \;\; \dot\forall\, t \in [a,b] \;\; \forall\, x \in \Omega(t) \;\; |x-\omega(t)| \leqslant r \implies |g(t,x)-\theta(t)| \leqslant R, \qquad (2)$$

в этом случае оператор N_g замкнут и ограничен.

Следующее утверждение — аналог результатов работ [8, 6, 15] — устанавливает связь между свойствами накрывания функции $g(t,\cdot)$ и оператора Немыцкого N_g.

Т е о р е м а 1. *Пусть заданы: число* $\alpha>0$, *функция* $x_0\in L_\infty([a,b],\Omega,\omega)$, *и пусть функция* g *удовлетворяет условию* (7). *Тогда, если при почти всех* $t\in[a,b]$ *отображение* $g(t,\cdot):\Omega(t)\to\Theta(t)$ *является* α*-накрывающим* (*или условно* α*-накрывающим*) *в точке* $x_0(t)$, *то оператор Немыцкого* $N_g:L_\infty([a,b],\Omega,\omega)\to L_\infty([a,b],\Theta,\theta)$ *будет* α*-накрывающим* (*соответственно, условно* α*-накрывающим*) *в* x_0.

Отметим, что в аналогичных теореме 1 утверждениях работ [8, 6, 15] рассматривается пространство $L_\infty([a,b],\Omega)$ существенно ограниченных функций $t\in[a,b]\mapsto x(t)\in\Omega(t)$ с метрикой (1). Если выбрать сечение $\omega_0(\cdot)$ многозначного отображения $\Omega(\cdot)$ существенно ограниченным, то $L_\infty([a,b],\Omega)=L_\infty([a,b],\Omega,\omega_0)$. Имея возможности выбора любого измеримого сечения $\omega(\cdot)$ многозначного отображения $\Omega(\cdot)$, мы значительно расширяем класс функций, для которых соответствующий оператор Немыцкого обладает свойством накрывания.

Установленную в теореме 1 взаимосвязь между накрыванием функции $g(t,\cdot)$ и оператора Немыцкого N_g можно использовать для исследования систем функциональных уравнений.

Пусть при $j=\overline{1,n}$ заданы измеримые многозначные отображения

$$t \in [a,b] \mapsto \Omega_j(t) \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}), \quad t \in [a,b] \mapsto \Theta_j(t) \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}),$$

измеримое сечение $\omega_j(\cdot)$ отображения $\Omega_j(\cdot)$. Положим $\omega(t)\doteq\big(\omega_1(t),\omega_2(t),\ldots,\omega_n(t)\big)$, $\Omega(t)\doteq\prod_{j=1}^n\Omega_j(t)$, тогда $L_\infty([a,b],\Omega,\omega)=\prod_{i=1}^n L_\infty([a,b],\Omega_i,\omega_i)$. Далее, пусть определены функции

$$\big(t \in [a,b],\, u_i \in \Omega_i(t), x \doteq (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \Omega(t)\big) \mapsto g_i(t,u_i,x) \in \Theta_i(t), \quad i=\overline{1,n},$$

удовлетворяющие условиям Каратеодори (т. е. измеримые по первому и непрерывные по совокупности остальных аргументов) и предположению

$$\forall\, r>0 \;\; \exists\, R\geqslant 0 \;\; \dot\forall\, t\in[a,b] \;\; \forall\, x\in\Omega(t) \;\; \forall\, u_i\in\Omega_i(t)$$
$$|x-\omega(t)|+|u_i-\omega_i(t)|\leqslant r \implies \big|g_i(t,u_i,x)-\theta_i(t)\big|\leqslant R,$$

где $\theta_i(t)\doteq g_i\big(t,\omega_i(t),\omega(t)\big)$. Эти условия обеспечивают действие, ограниченность и замкнутость оператора $N_{g_i}:L_\infty([a,b],\Omega_i,\omega_i)\times L_\infty([a,b],\Omega,\omega)\to L_\infty([a,b],\Theta_i,\theta_i)$,

$$\big(N_{g_i}(u_i,x)\big)(t) = g_i\big(t,u_i(t),x(t)\big).$$

Пусть заданы функции $y_i \in L_\infty([a,b],\Theta_i,\theta_i)$. Рассмотрим систему функциональных уравнений

$$\begin{cases} g_1\big(t, x_1(t), x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big) = y_1(t), \\ g_2\big(t, x_2(t), x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big) = y_2(t), \\ \qquad\qquad \vdots \\ g_n\big(t, x_n(t), x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big) = y_n(t). \end{cases} \tag{3}$$

Решением системы (3) называем векторную существенно ограниченную функцию $x \in L_\infty([a,b],\Omega,\omega)$, удовлетворяющую всем уравнениям почти всюду на $[a,b]$.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\alpha > 0$, $0 \leqslant q < 1$. Пусть найдены измеримые функции $\alpha_i : [a,b] \to \to [\alpha,\infty)$, $\beta_{ij} : [a,b] \to [0,\infty)$, $i,j = \overline{1,n}$, такие что при п. в. $t \in [a,b]$ $n \times n$ матрица $C(t)$, $c_{ij}(t) = \alpha_i^{-1}(t)\beta_{ij}(t)$ имеет спектральный радиус $\varrho\big(C(t)\big) \leqslant q$ и выполнены условия:*

(*a*) *при любом $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega(t)$ отображения $g_i(t,\cdot,x) : \Omega_i(t) \to \Theta_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, являются условно $\alpha_i(t)$-накрывающими в точке x_i, и справедливо включение*

$$y_i(t) \in g_i(t, \Omega_i(t), x), \quad i = \overline{1,n};$$

(*b*) *для любых $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega(t)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \Omega(t)$ отображения $g_i(t, u_i, x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot\,, x_{j+1}, \dots, x_n) : \Omega_j(t) \to \Theta_i(t)$, $i,j = \overline{1,n}$, являются $\beta_{ij}(t)$-липшицевыми в точке u_j.*

Тогда система уравнений (3) разрешима; кроме того, для любого $\varepsilon \in (0,q)$ существуют такие последовательности измеримых множеств E_m, осуществляющих разбиение отрезка $[a,b]$, и норм $|\cdot|^{(m)}$ пространства $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, что для любых $x, u \in L_\infty([a,b],\Omega,\omega)$ числовая последовательность $\big\{\mathrm{vrai\,sup}_{t \in E_m} |x(t) - u(t)|^{(m)}\big\}_{m \in \mathbb{N}}$ ограничена, равенство

$$\widetilde{\rho}(x,u) \doteq \sup_{m \in \mathbb{N}} \Big(\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in E_m} |x(t) - u(t)|^{(m)}\Big)$$

определяет метрику в пространстве $L_\infty([a,b],\Omega,\omega)$, для любого $u^0 \in L_\infty([a,b],\Omega,\omega)$ существует решение $x = \xi \in L_\infty([a,b],\Omega,\omega)$ системы (3), удовлетворяющее оценке

$$\big(1 - q - \varepsilon\big)\, \widetilde{\rho}(\xi, u^0) \leqslant \sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in E_m} \left| \left(\frac{y_1(t) - (N_{g_1}(u_1^0, u^0))(t)}{\alpha_1(t)}; \frac{y_2(t) - (N_{g_2}(u_2^0, u^0))(t)}{\alpha_2(t)}; \dots; \frac{y_n(t) - (N_{g_n}(u_n^0, u^0))(t)}{\alpha_n(t)} \right) \right|^{(m)} \right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения существенно использует теорему 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mordukhovich B.S., Wang B.* Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces // Maths. Math. Science. 50. 2004. P. 2650-2683.
2. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151-155.
3. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. № 1. P. 105-127.
4. *Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S, Zhukovskii S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. P. 1026-1044.
5. *Жуковская Т.В.* О продолжении решения нелинейного уравнения Volterra // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2012. Т. 17. Вып. 3. С. 857-866.

6. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613-634.
7. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523-1537.
8. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis. 2011. V. 90. No. 6. P. 889-898.
9. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561-1570.
10. *Плужникова Е.А.* Один метод исследования разрешимости задач управления для дифференциальных уравнений // Тезисы научной конференции "Тихоновские чтения". М., 2011. С. 65-66.
11. *Жуковская Т.В., Пучков Н.П.* О приближенном нахождении точек совпадения отображений // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения — XIII". Воронеж: Изд-во ВГУ, 2012. С. 65-67.
12. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Теорема о накрывании операторов в произведении метрических пространств // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2011. Т. 16. Вып. 1. С. 70-72.
13. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об одном методе исследования разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1673–1674.
14. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. СМБ. М.: Наука, 1968. 448 с.
15. *Плужникова Е.А.* О накрывании оператора Немыцкого в пространстве суммируемых функций // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1686-1687.

Поступила в редакцию 10 ноября 2012 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-00-645, № 11-01-00-626), Министерства образования и науки РФ (ГК № 14.132.21.1348, проект № 1.1877.2011).

Zhukovskaya T.V., Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. ON RESEARCH OF SYSTEMS OF FUNCTIONAL EQUATIONS BY METHODS OF COVERING MAPPINGS THEORY

The conditions of covering of the Nemytsky operator acting in spaces of measurable functions are derived. This result has allowed to apply the theorems on perturbations of vector covering mappings proved earlier by the authors to studying systems of functional equations. For such systems, the conditions of solvability in a class of measurable functions are found; the estimates of solutions are derived.

Key words: covering mappings in metric spaces; systems of functional equations; the Nemytsky operator.